PART2　三角関数の最大・最小（$t=\sin\theta-\cos\theta$）

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$y=\sin 2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

$\sin\theta+\cos\theta$ や $\sin\theta-\cos\theta$ を t とおき，両辺を2乗すると，$\sin\theta\cos\theta$ が式に現れ，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いることで，$\sin\theta\cos\theta$ を t で表すことができる。このとき t のとり得る値の範囲に注意。

第10講　PART2　確認問題

1　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

$\sin\theta\cos\theta=$ ［ア］

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

［イ］

(3)　$y=4\sin\theta-4\cos\theta-2\sin2\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

最大値 ［ウ］，最小値 ［エオ］

[［ア］の選択肢]

① $\dfrac{t}{2}$　② $\dfrac{t+1}{2}$　③ $\dfrac{t-1}{2}$

④ $\dfrac{1-t}{2}$　⑤ $\dfrac{t^2}{2}$　⑥ $\dfrac{t^2+1}{2}$

⑦ $\dfrac{t^2-1}{2}$　⑧ $\dfrac{1-t^2}{2}$

[［イ］の選択肢]

① $-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$　② $-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$

③ $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$　④ $-1 \leqq t \leqq 0$

⑤ $-1 \leqq t \leqq 1$　⑥ $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

⑦ $0 \leqq t \leqq 1$　⑧ $0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

PART2　三角関数の最大・最小 ($t=\sin\theta-\cos\theta$)

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

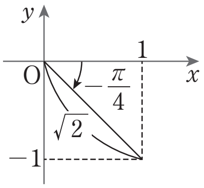
(3)　$y=\sin2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$　より　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

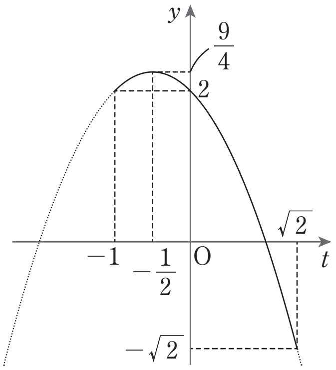
したがって　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$y=\sin2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$

$=2\sin\theta\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+1$

$=2\cdot\dfrac{1-t^2}{2}-t+1$

$=-t^2-t+2=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$



$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ より

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{9}{4}$

$t=\sqrt{2}$ のとき　最小値 $-\sqrt{2}$

第10講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑧，イ：②，ウ：5，エオ：−3

[解説]

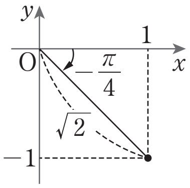
(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2$$ [A]

$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\dfrac{1-t^2}{2}}$



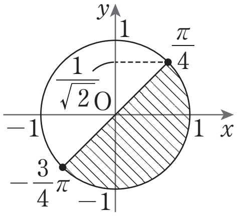
(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$ [B]

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$-\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$

よって

$$-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$



ゆえに

$$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$$

したがって　$\mathbf{-\sqrt{2}\leqq t\leqq1}$

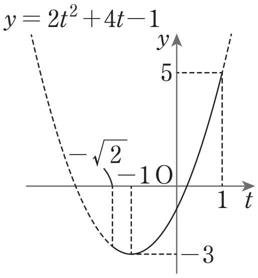
(3)　$y=4\sin\theta-4\cos\theta-2\sin2\theta+1$ [C]

$$=4(\sin\theta-\cos\theta)-2\cdot2\sin\theta\cos\theta+1$$

$$=4t-4\cdot\frac{1-t^2}{2}+1$$

$$=2t^2+4t-1$$

$$=2(t+1)^2-3$$



よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq1$

の範囲において，y は

$t=1$ のとき　最大値 **5**

$t=-1$ のとき　最小値 **−3**　をとる。

[A]
$t=\sin\theta+\cos\theta$ や $t=\sin\theta-\cos\theta$ は，両辺を 2 乗して三角関数の相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

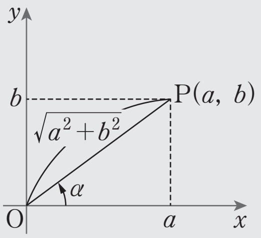
を用いると，$\sin\theta\cos\theta$ を t で表すことができる。

[B]　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



[C]　2 倍角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$